جبر خطی در Mathstudio

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

اشاره

معرفی یک ماتریس، جمع، تفریق و ضرب ماتریسی، دترمینان ماتریس‌ها و محاسبهٔ ماتریس معکوس از جمله مواردی هستند که روش محاسبهٔ آن‌ها با نرم‌افزار «Mathstudio» روی سیستم عامل اندروید در این مختصر مطرح شده‌اند. در پایان ضرب بردارها و محاسبهٔ زاویهٔ بین بردارها نیز بیان شده است.

در ادامهٔ مقاله‌های قبل در این مقاله به موضوع جبر خطی می‌پردازیم که بیشتر همان بحث ماتریس است. ماتریس شاید یکی از قسمت‌های ساده در ریاضی دبیرستانی است که در ریاضی سال دوم دبیرستان و هنرستان، همچنین در کتاب هندسه تحلیلی و جبر خطی سال چهارم ریاضی مطرح می‌شود. ولی برخی قسمت‌های آن به‌دلیل محاسبات طولانی خسته‌کننده است. این مشکل در این نرم‌افزار به سادگی حل شده است.

معرفی یک ماتریس

ماتریس به کمک کروشه تعریف می‌شود. هر سطر ماتریس داخل یک کروشه قرار می‌گیرد و سطرها به کمک ویرگول از هم جدا می‌شوند. کروشه در گوشهٔ سمت راست صفحهٔ کلید رایانه وجود دارد. هر ماتریس باید اسمی داشته باشد که مساوی کروشهٔ اصلی قرار می‌گیرد. برای مثال ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۵ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

A=[[۲,-۱,۳],[۵,۰,۷]]

۲	-۱	۳
۵	۰	۷

تصویر۱

جمع، تفریق و ضرب ماتریسی

برای انجام اعمال جبری روی ماتریس‌ها، ابتدا باید این ماتریس‌ها را به برنامه معرفی کنیم. اعمال جمع و تفریق طبق معمول و عمل ضرب با علامت ستاره انجام می‌شود. می‌توان چند ماتریس را در یک سلول تعریف کرد. به این منظور بعد از معرفی هر ماتریس کلید "Enter" را فشار می‌دهیم تا خط جدید در سلول موردنظر تعریف شود.

مثـــلاً می‌خواهیم برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲&۳\\-۱&۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴&۰\\۱&۵\end{bmatrix}$ ماتریس‌هـــای A×B، A-B و A+B را حساب کنیم (تصویر ۲).

```
A=[[۲,۳],[-۱,۱]]
B=[[۴,۰],[۱,۵]]
A+B
```

۶	۳
۰	۶

```
A-B
```

-۲	۳
-۲	-۴

```
A*B
```

۱۱	۱۵
-۳	۵

تصویر ۲

توان ماتریس

در صورتی که بخواهیم توان nام یک ماتریس مربعی را حســـاب کنیم، از دستور A^n استفاده می‌کنیم. برای مثال، توان چهارم ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۰&۲\\۰&۳&۰\\۴&۵&۱\end{bmatrix}$ را حساب می‌کنیم (تصویر ۳).

```
A=[[۱,۰,۲],[۰,۳,۰],[۴,۵,۱]]
A^۴
```

۱۱۳	۲۶۰	۷۲
۰	۸۱	۰
۱۴۴	۴۴۰	۱۱۳

تصویر ۳

اما فقط کار به همین محاســـبات ختم نمی‌شـــود و ما می‌توانیم برای حل مســـائل بزرگ‌تر نیز از این برنامه کمک بگیریم. مثلاً می‌خواهیم شـــکل کلـــی توان nام ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}$ را حســـاب کنیم. در این صورت مراحل حدس و آزمایش را با این برنامه و به سرعت طی می‌کنیم (تصویر ۴).

```
A=[[۱,۱],[۰,۱]]
A^۲
```

۱	۲
۰	۱

```
A^۳
```

۱	۳
۰	۱

```
A^۴
```

۱	۴
۰	۱

```
A^۵
```

۱	۵
۰	۱

تصویر ۴

با توجه به جواب‌ها می‌بینیم که $A^n=\begin{bmatrix}۱&n\\۰&۱\end{bmatrix}$. در ادامه می‌توانیم با استقرای ریاضی مسئله را ثابت کنیم.

همچنین تـــوان nام ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۰&۱&۴\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$ را حساب می‌کنیم (تصویر ۵).

```
A=[[۱,۲,۳],[۰,۱,۴],[۰,۰,۱]]
```

۱	۲	۳
۰	۱	۴
۰	۰	۱

```
A^۲
```

۱	۴	۱۴
۰	۱	۸
۰	۰	۱

```
A^۳
```

۱	۶	۳۳
۰	۱	۱۲
۰	۰	۱

```
A^۴
```

۱	۸	۶۰
۰	۱	۱۶
۰	۰	۱

تصویر ۵

با توجه به جواب‌ها به این نتیجه می‌رسیم که:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n & a_n \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a_n در این مورد دنبالهٔ ... ,۳,۱۴,۳۳,۶۰ است. با کمک همین برنامه می‌توان جملهٔ عمومی این دنباله را پیدا کرد. جملهٔ عمومی این دنباله $a_n=4n^2-n$ است که به کمک مفهوم رگرسیون به‌دست آمده است.

ترانهادهٔ ماتریس

برای به‌دست آوردن ترانهادهٔ ماتریسی به نام B، ابتدا ماتریس را تعریف و سپس از دستور Transpose(B) استفاده می‌کنیم (تصویر ۶).

```
B=[[۱,۲,۳],[۰,۴,۵]]
```

۱	۲	۳
۰	۴	۵

```
Transpose(B)
```

۱	۰
۲	۴
۳	۵

تصویر ۶

دترمینان ماتریس

برای محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس مربعی به نام C، پس از معرفی ماتریس از دستور Det(C) استفاده می‌کنیم (تصویر ۷).

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

حاصل $|A\times B|$, $|A|\,|B|$, $|A|+|B|$ را حساب کنید.

```
۱ A=[[۱,۲,۳],[۳,۴,۱],[۰,۳,۴]]
۲ B=[[−۲,۳,۱],[۰,۵,۵],[۳,۲,۱]]
۳ Det(A*B)
۶۴۰
```

```
Det(A) * Det(B)
۶۴۰
```

```
Det(A) + Det(B)
۵۶
```

تصویر ۷

وارون ماتریس

برای محاسبهٔ وارون یک ماتریس کافی است بعد از معرفی ماتریس دستور Inverse(A) را اجرا کنیم. مثلاً وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ را حساب می‌کنیم (تصویر ۸).

```
A=[[۳,۴,۵],[۵,۳,۴],[۴,۵,۳]]
```

۳	۴	۵
۵	۳	۴
۴	۵	۳

```
Det(A)
۳۶
```

```
Inverse(A)
```

$-\frac{11}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{36}$
$\frac{1}{36}$	$-\frac{11}{36}$	$\frac{13}{36}$
$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{11}{36}$

تصویر ۸

یکی از مزایای این نرم‌افزار آن است که برخی از محدودیت‌ها را از پیش روی دانش‌آموزان برمی‌دارد. مثلاً می‌توانیم دترمینان و معکوس یک ماتریس مرتبهٔ ۴ را به سادگی حساب کنیم و از آن لذت ببریم (تصویر ۹).

A=[[۱ ,۲ ,۳,۴] ,[۲ ,۳ ,۴ ,۱],[۳ ,۴ ,۲ ,۱],[۴ ,۱ ,۲ ,۳]]

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۲	۱
۴	۱	۲	۳

Det(A)

۱۲۰

Inverse(A)

$-\frac{۱۳}{۶۰}$	$\frac{۱}{۱۲۰}$	$\frac{۱}{۳۰}$	$\frac{۱۱}{۴۰}$
$\frac{۷}{۶۰}$	$-\frac{۱۹}{۱۲۰}$	$\frac{۱۱}{۳۰}$	$-\frac{۹}{۴۰}$
$-\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۱۷}{۴۰}$	$-\frac{۳}{۱۰}$	$\frac{۱}{۴۰}$
$\frac{۱۷}{۶۰}$	$-\frac{۲۹}{۱۲۰}$	$\frac{۱}{۳۰}$	$\frac{۱}{۴۰}$

تصویر۹

بردارها

بردار به‌صورت ماتریسی یک سطری معرفی می‌شود. اگر u و v دو بردار باشند، ضرب درونی با علامت Dot(v,u) و ضرب خارجی با علامت Cross (v,u) محاسبه می‌شود. برای مثال، اگر داشته باشیم: u=۲i+۴j+۷k و v=i+۳j-۵k، آن‌گاه حاصل (v-u).(v+u) (v-u)×(v+u)، و v.u,v×u را حساب کنید (تصویر ۱۰).

۱	**V=[۱,۳,-۵]**
۲	**U=[۲,۴,۷]**
۳	**Dot(V,U)**

-۲۱

Dot(V-U, V+U)

-۳۴

Cross(V,U)

[۴۱ ,-۱۷,-۲]

Cross(V-U, V+U)

[۸۲ ,-۳۴,-۴]

تصویر۱۰

زاویهٔ بین دو بردار

برای محاسبهٔ زاویهٔ بین دو بردار u و v کافی است که دستور angle(v,u) را اجرا کنیم. برای مثال، اگر w=i+j+k ، u=j+k و v=i+j زاویهٔ بین بردارهای u و v و همچنین w و u، و w و v را حساب کنید (تصویر ۱۱).

۱	**v=[۱,۱,۰]**
۲	**u=[۰,۱,۱]**
۳	**w=[۱,۱,۱]**
۴	**Angle(v,u)**

۶۰

Angle(u,w)

۳۵,۲۶۴۳۹

Angle(v,w)

۳۵,۲۶۴۳۹

تصویر۱۱

سخن پایانی

با کمک Mathstudio می‌توان محاسبات دیگری نیز روی ماتریس‌ها انجام داد؛ از جمله محاسبات مقادیر ویژه و بردارهای ویژه که در حیطهٔ ریاضی دبیرستان نیستند.

پرسش‌های پیکارجو!

چند جفت اعداد اول (p,q) یافت می‌شوند که در رابطهٔ $۲^p+p^۲=q$ صدق کنند؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲

د) ۳ هـ) ۴